Analiza funkcjonalna

Lista 3 (zbieżność ciągów w klasycznych prz. Banacha)

Zad 1. Pokazać, że

a) w przestrzeniach ciagów c_0, c, ℓ_p, $p \in [1, \infty]$, zbieżność w normie pociąga zbieżność po współrzędnych, ale nie jest jej równoważna,

b) w przestrzeniach funkcji $C([a,b])$, $C^{(k)}([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$, zbieżność w normie pociąga zbieżność punktową,

c) w przestrzeniach $L_p([a,b])$, $p \in [1,\infty]$ zbieżność w normie nie pociąga zbieżności prawie wszędzie.

Zad 2. Sprawdzić, czy ciąg x_n elementów przestrzeni Banacha X jest zbieżny do ciągu a:

	X	x_n	a		X	x_n	a
a)	ℓ_1	$(\underbrace{\sin\frac{1}{2^n}, ..., \sin\frac{1}{2^n}}_{n}, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$	i)	$C[-3,3]$	$\sqrt{t^2+\frac{1}{n^3}}$	$\|t\|$
b)	ℓ_3	$(\underbrace{\frac{n^2}{2^n}, \frac{n^2}{2^n}, ..., \frac{n^2}{2^n}}_{n}, 0, ...)$	$(1,0,...,0,...)$	j)	$C[0,8]$	$(\frac{t}{8})^n - (\frac{t}{8})^{2n} + t$	t
c)	c	$(\underbrace{(\frac{4n+1}{4n+3})^n, ..., (\frac{4n+1}{4n+3})^n}_{n}, 0, ...)$	$(e^{-\frac{1}{2}}, ..., e^{-\frac{1}{2}}, ...)$	k)	$C[-4,4]$	$\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1}$	t
d)	$\ell_{\frac{8}{5}}$	$(\underbrace{\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, ..., \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}}_{n}, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$	l)	$C[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	$\frac{t^n-t}{1+t^n}$	1
f)	ℓ_∞	$(0, \frac{7}{8}, ..., \frac{n^3-1}{n^3}, 0, 0, ...)$	$(0, \frac{7}{8}, ..., \frac{k^3-1}{k^3}, ...)$	m)	$C^{(1)}[0,1]$	$\sqrt[n]{1+t^n}$	t
g)	c_0	$(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, ..., \frac{1}{n^2}}_{n}, n, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$	n)	$C[0,\frac{1}{3}]$	$(3t)^n - (3t)^{n+1} - 3t^n$	0
h)	ℓ_p	$(\underbrace{0,...,0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n^2}, ..., \frac{1}{n^2}}_{n}, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$	o)	$L_3[0,1]$	$n^{\frac{4}{3}} I_{(0,\frac{1}{n})}$	0

Zad 3. Zbadać zbieżność ciągu x_n w przestrzeni Banacha X, gdy

	X	x_n		X	x_n		X	x_n
a)	ℓ_∞	$(\underbrace{tg(1+\frac{1}{n})^n, ..., tg(1+\frac{1}{n})^n}_{n}, 0, 0, ...)$	i)	$C[-1,0]$	$\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3t+1}$	r)	$C^{(1)}[0,1]$	$\frac{t^n}{n}$
b)	ℓ_3	$(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 1, 0, ...)$	j)	$C[1,2]$	$\frac{2t^n-1}{1+t^n}$	s)	c_0	$tg(\frac{1}{n^{k+1}})$
c)	ℓ_2	$(\underbrace{\sin\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}, ..., \sin\frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, ...)$	k)	$C[1,2]$	$\frac{t^2}{n^2}\ln(\frac{t}{n})$	t)	$C[0,2]$	$\sqrt[n]{1+t^n}$
d)	ℓ_2	$(\underbrace{\cos\frac{1}{n^2}, \sin\frac{1}{n^2}, ..., \sin\frac{1}{n^2}}_{n}, 0, 0, ...)$	l)	$C[-1,\frac{1}{2}]$	$\frac{(t+1)^{2n}-t^2n}{(t+2)^{2n}}$	u)	$C^{(1)}[0,2]$	$\sqrt[n]{1+t^n}$
e)	$\ell_{\frac{5}{2}}$	$((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+2}{n})^n, ..., (\frac{n+(n-1)}{n})^n, 0, ...)$	m)	$C[1,2]$	$n\sin(\frac{t^2}{n}) + \frac{t^3}{n}$	w)	$L_2([0,1])$	$\sqrt[n]{t}$
f)	ℓ_∞	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n^2}{n^2+1}, 0, 0, ...)$	n)	$C[0,9]$	$\frac{9^nt^n-t^{2n}}{9^{2n}}$	x)	$L_1([0,1])$	t^n
g)	ℓ_1	$(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2}, \frac{\sin 3^n}{n^2}, ..., \frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n}, 0, 0, ...)$	o)	$C[-\frac{\pi}{2},0]$	$(\sin t)^{2n} + \sqrt[3]{\frac{t}{n}}$	y)	$H_\alpha([0,1])$	t^n
h)	ℓ_p	$(1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...)$	p)	$C[-1,5]$	$\mathrm{arctg}(n(t^2+1))$	z)	$H_1([0,1])$	$\frac{\sin(nx)}{n}$

Zad 4. Wykazać, że w przestrzeni ℓ_∞ nie istnieje norma, w której zbieżność byłaby równoważna zbieżności po współrzędnych.